Roland Huber/Mark Kuschkowitz **WS 2014/2015**

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II

7. Februar 2015

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte	4	4	4	4	4	4	24
Punkte erreicht							

Bemerkungen und Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt **120** Minuten.
- Die Klausur ist mit **12** erreichten Punkten bestanden.
- Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf ein eigenes Blatt.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- **Alle Aussagen und Antworten sind zu begründen.**

Aufgabe 1: (1 + 2 + 1 = 4 Punkte)

(i) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix über $\mathbb{R}$. Geben Sie die Definition dafür, daß A negativ semidefinit ist.

(ii) Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter euklidischer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Geben Sie die Definition dafür, daß f eine Isometrie $(V, \langle\ ,\ \rangle) \to (V, \langle\ ,\ \rangle)$ ist. Geben Sie die Definition des zu f adjungierten Endomorphismus von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Leiten Sie aus diesen beiden Definitionen ab: Ist f eine Isometrie, so ist f^{-1} der zu f adjungierte Endomorphismus.

(iii) Geben Sie die Definition des Radikals eines symmetrischen bilinearen Raumes (V, b). Wann heißt eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ auf einem K-Vektorraum V nicht ausgeartet?

Aufgabe 2: (2 + 1 + 1 = 4 Punkte)
Betrachtet wird der Endomorphismus

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{C}^4 &\to \mathbb{C}^4 \\
(x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto (x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4, 0, 0).
\end{aligned}
$$

(i) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{C}^4$, so daß $M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform ist.

(ii) Bestimmen Sie die Menge $\{A \in M(4 \times 4, \mathbb{C}) \mid A$ ist von Jordanscher Normalform und es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^4$ mit $A = M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}\}$ und geben Sie zu jedem Element A aus dieser Menge ein Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^4$ mit $A = M_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}}$ an.

(iii) Geben Sie den Stabilitätsindex von f an.

Aufgabe 3: (3 + 1 = 4 Punkte)

(i) Betrachtet wird der Endomorphismus

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{C}^3 &\to \mathbb{C}^3 \\
(x_1, x_2, x_3) &\mapsto (2x_1 + x_3, 2x_1 + x_3, 2x_3).
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie Basen der verallgemeinerten Eigenräume von f. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von f. Ist f diagonalisierbar?

(ii) Seien V ein endlich erzeugter $\mathbb{C}$-Vektorraum und f ein Endomorphismus von V mit $\mathrm{cp}_f = (X-2)^4$ und $\mathrm{rk}(f - 2 \cdot \mathrm{id}_V) = 3$. Geben Sie eine Matrix A in Jordanscher Normalform an, so daß es eine Basis $\mathcal{A}$ von V mit $A = M_{f,\mathcal{A},\mathcal{A}}$ gibt. (Begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 4: (2 + 1 + 1 = 4 Punkte)
Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ werden die symmetrischen Bilinearformen $b_1 := B_{A_1,\mathcal{A}}$ und $b_2 := B_{A_2,\mathcal{A}}$ betrachtet, wobei $\mathcal{A}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist und $A_1, A_2 \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrizen sind

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis des bilinearen Raums $(\mathbb{R}^3, b_1)$.

(ii) Ist b_1 indefinit? Ist b_2 indefinit? (Begründen Sie Ihre Antwort).

(iii) Sind die bilinearen Räume $(\mathbb{R}^3, b_1)$ und $(\mathbb{R}^3, b_2)$ isometrisch? (Begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 5: (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
Seien K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit $V \neq \{0\}$ und $f : V \to K$, $g : V \to K$ lineare Abbildungen mit $f \neq 0$ und $g \neq 0$. Sei $\mathcal{A}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}$ die Standardbasis des K-Vektorraums K.

(i) Zeigen Sie, daß die Abbildung $b : V \times V \to K, (v, w) \mapsto f(v) \cdot g(w)$ bilinear ist.

(ii) Welche Beziehung besteht zwischen den Matrizen $M_{b,\mathcal{A}}, M_{f,\mathcal{A},\mathcal{B}}, M_{g,\mathcal{A},\mathcal{B}}$?

(iii) Zeigen Sie, daß b genau dann nicht ausgeartet ist, wenn $\dim V = 1$.

Aufgabe 6: (2 + 2 = 4 Punkte)
Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich erzeugter euklidischer Vektorraum und $f : (V, \langle\ ,\ \rangle) \to (V, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Isometrie. Zeigen Sie

(i) $\mathrm{im}(f - \mathrm{id}_V) \perp \ker(f - \mathrm{id}_V)$.

(ii) $[\mathrm{im}(f - \mathrm{id}_V)]^\perp = \ker(f - \mathrm{id}_V)$.